Die Böschungsflächen des elliptischen Raumes

Lübbert, Christoph

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 26, 1976, S.127-134

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Die Böschungsflächen des elliptischen Raumes

von **Christoph Lübbert,** Darmstadt

Vorgelegt von Hans Robert Müller

Eine Regelfläche im euklidischen Raum heißt bekanntlich *Böschungsfläche*, wenn ihre Erzeugenden mit einer festen Richtung $\mathfrak{c}$ einen konstanten Winkel bilden (*Brauner* [5, 6], *Kruppa* [9], *Hoschek* [8]), von weiteren Zusatzbedingungen wollen wir hier absehen. Die Böschungsflächen im euklidischen Raum sind nach dieser Definition identisch mit den Regelflächen *konstanter konischer Krümmung* $\frac{\tau}{\varkappa}$ ($\varkappa, \tau$: natürliche Krümmung und Torsion). Den Zylinder mit der Erzeugendenrichtung $\mathfrak{c}$, auf dem die Striktionslinie liegt, nennt man den *Böschungszylinder*. Speziell erhält man die *Böschungslinien* als Gratlinien von Böschungstorsen; sie sind also Isogonaltrajektorien zu den Erzeugenden des Böschungszylinders.

Analog hat *H. R. Müller* [13] im 3-dimensionalen elliptischen Raum $\mathbf{E}^3$ Böschungslinien als Isogonaltrajektorien zu den Erzeugenden eines Clifford-Zylinders definiert und zwischen *Links-* und *Rechtsböschungslinien* unterschieden, je nachdem der Böschungszylinder ein Links- oder Rechtszylinder ist. Im $\mathbf{E}^3$ sind Böschungslinien i. allg. keine Kurven konstanter konischer Krümmung (da letztere im $\mathbf{E}^3$ lediglich die Polarkurven zu Kurven konstanter Krümmung sind), sie sind vielmehr spezielle *Bertrand-Kurven* (vgl. etwa [10]), was im Euklidischen wiederum i. allg. nicht zutrifft.

Es liegt nun nahe, entsprechend der Definition von *H. R. Müller* auch unter den Regelflächen des $\mathbf{E}^3$ die Böschungsflächen zu definieren.

1. Der elliptische Raum $\mathbf{E}^3$ wird bekanntlich[1]) dargestellt durch die 3-dimensionale Einheitssphäre $\mathbf{S}^3$ im euklidischen Vektorraum $\mathbf{R}^4$, wobei „Gegenpunkte" $X, -X$ ($\|X\| = 1$) identifiziert werden. Als Metrik $\delta(X, Y)$ nimmt man die sphärische Metrik: $\cos\delta(X, Y) = |\langle X, Y\rangle|$ (euklidisches Skalarprodukt). Zur Beschreibung einer Regelfläche Φ des $\mathbf{E}^3$ bedient man sich als Erzeugender der orientierten Kante

$$g_3(u) = (P_0(u), P_3(u))$$

eines positiv orientierten *begleitenden Polartetraeders*

$$\mathfrak{P}(u) = \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix}, \quad \langle P_\alpha, P_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}, \; \det\mathfrak{P} = +1,$$

welches zunächst nur bis auf elliptische Schraubungen entlang den *absolut polaren*[2]) Achsen $g_3(u)$, $g_3{}^*(u) = (P_1, P_2)$ festgelegt ist. $g_3{}^*$ erzeugt die zu Φ „*polare*" Regel-

[1]) Vgl. etwa *Blaschke* [1, 2] *H. R. Müller* [14].

[2]) Zwei Geraden g, g^* des $\mathbf{E}^3$ heißen *absolut polar*, wenn $\langle X, Y\rangle = 0$ gilt für alle $X \in g$, $Y \in g^*$.

fläche Φ^*. Unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit nach dem reellen Parameter $u \in I$ ergeben sich für Φ die Ableitungsgleichungen in Matrizenform

$$\mathrm{d}\mathfrak{P} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{P}$$

mit schiefsymmetrischer Ableitungsmatrix, $\mathfrak{S}^T = -\mathfrak{S}$. Im allg. läßt sich für jedes $u \in I$ das Begleittetraeder $\mathfrak{P}$ eindeutig entlang g_3, g_3^* so verschrauben, daß $\langle \mathrm{d}P_0, P_2\rangle = \langle \mathrm{d}P_1, P_3\rangle = 0$ wird, so daß die Ableitungsmatrix die Form

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa_1 & 0 & \varkappa_3 \\ -\varkappa_1 & 0 & \tau_3 & 0 \\ 0 & -\tau_3 & 0 & \tau_1 \\ -\varkappa_3 & 0 & -\tau_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

erhält[3]). Hierdurch wird $\mathfrak{P}$ zum „*natürlichen Begleittetraeder*" der Regelfläche Φ, welches im Euklidischen dem Begleitdreibein von *Kruppa* [9] entspricht. Die Punkte $P_0, P_3 \in g_3$ bzw. $P_1, P_2 \in g_3^*$ bekommen dann die Bedeutung von *Striktionspunkten* für Φ bzw. Φ^*. Ferner sind mit (1.1) $g_1 = (P_0, P_1)$, $g_1^* = (P_2, P_3)$ bzw. $g_2 = (P_0, P_2)$, $g_2^* = (P_3, P_1)$ die Erzeugenden der *Zentraltangentenflächen* Φ^z, Φ^{z*} bzw. der *Zentralnormalenflächen* Φ^n, Φ^{n*}. Die Momentanen Fixachsen p, p^* der infinitesimalen elliptischen Schraubung, welche $\mathfrak{P}(u)$ nach $\mathfrak{P}(u + \mathrm{d}u)$ bringt, bezeichnen wir als „*Krümmungsachsen*" der Regelfläche Φ, sie erzeugen die *Krümmungsachsenflächen* Φ^a, Φ^{a*} (vgl. auch *H. R. Müller* [14] S. 116 und *Lübbert* [12]).

Für das Weitere erweist sich als nützlich die von *Clifford*, *Fubini*, *Hjelmslev* und *Study* her bekannte bijektive Abbildung des Einheitssphärenpaares $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$ auf die Menge der orientierten Geraden g des $\mathbf{E}^3$

$$(\mathfrak{r}, \mathfrak{r}') \to g \underset{\text{def}}{=} [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}'] . \tag{1.2a}$$

Ist die orientierte Gerade g im $\mathbf{E}^3$ durch irgendein Paar (P, Q) polarer Punkte $(\langle P, Q\rangle = 0)$ gegeben, so erhält man bekanntlich[4]) ihre „*sphärischen Urbilder*" $\mathfrak{r}, \mathfrak{r}' \in \mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$ über das in der üblichen Weise in $\mathbf{R}^4 = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^3$ eingeführte *Quaternionenprodukt*

$$\mathfrak{r} = Q \circ \bar{P}, \quad \mathfrak{r}' = \bar{P} \circ Q \quad (\|\mathfrak{r}\| = \|\mathfrak{r}'\| = 1) \tag{1.2b}$$

und nennt $\mathfrak{r}$ bzw. $\mathfrak{r}'$ den *linken* bzw. *rechten Richtungsvektor* der Geraden g. Dem natürlichen Begleittetraeder $\mathfrak{P}^T(u) = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ einer Regelfläche im $\mathbf{E}^3$ ist durch die Abbildung (1.2) invariant ein *natürliches* „*linkes*" bzw. „*rechtes*" *orthonormiertes Begleitdreibein*

$$\mathfrak{R}^T = (\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{R}'^T = (\mathfrak{r}_1', \mathfrak{r}_2', \mathfrak{r}_3') \ (\det \mathfrak{R} = \det \mathfrak{R}' = +1)$$

über die Tetraederkanten $g_i = (P_0, P_i) = [\mathfrak{r}_i, \mathfrak{r}_i']$, $g^* = (P_j, P_k) = [\mathfrak{r}_i, -\mathfrak{r}_i']$ $(i, j, k$ zykl. $1, 2, 3)$ zugeordnet. Mit den Ableitungsgleichungen

$$\mathrm{d}\mathfrak{r}_i = \mathfrak{z} \times \mathfrak{r}_i, \quad \mathrm{d}\mathfrak{r}_i' = \mathfrak{z}' \times \mathfrak{r}_i' \quad (i = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

---

[3]) Dies ist nicht in eindeutiger Weise möglich, wenn Φ ein *Clifford-Zylinder* $(\varkappa_1 = \pm \tau_1)$ ist.

[4]) Vgl. etwa *Blaschke* [2] S. 6.

und den Darbouxvektoren

$$\mathfrak{s} = \omega_1 \mathfrak{x}_1 + \omega_3 \mathfrak{x}_3, \quad \mathfrak{s}' = \omega_1' \mathfrak{x}_1' + \omega_3' \mathfrak{x}_3' \tag{1.4}$$

Hierbei stehen die sphärischen Differentialinvarianten ω_i, ω_i' mit denen der Regelfläche aus (1.1) in der Beziehung[5])

$$\omega_i = \tau_i + \varkappa_i, \quad \omega_i' = \tau_i - \varkappa_i \quad (i = 1, 3) \tag{1.5}$$

Für die Einheitsrichtungen der Darbouxvektoren kann man ansetzen:

$$\mathfrak{s}/\|\mathfrak{s}\| = \mathfrak{p} = \sin\theta\, \mathfrak{x}_1 + \cos\theta\, \mathfrak{x}_3, \quad \mathfrak{s}'/\|\mathfrak{s}\| = \mathfrak{p}' = \sin\theta'\, \mathfrak{x}_1' + \cos\theta'\, \mathfrak{x}_3' \tag{1.6}$$

Da $\mathfrak{p}$ der sphärische Krümmungsmittelpunkt der von $\mathfrak{x}_3$ beschriebenen sphärischen Kurve ist, ist

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \cot\theta \tag{1.7}$$

ihre *geodätische Krümmung*, d. h. θ ihr *sphärischer Krümmungsradius*. Entsprechendes gilt für die gestrichenen Größen $\mathfrak{x}_3, \mathfrak{p}', \theta'$. Der Tatsache, daß $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{p}'$ die momentanen Drehachsen der Bewegungen der Dreibeine $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{R}'$ sind, entspricht im $\mathbf{E}^3$, daß das natürliche Begleittetraeder $\mathfrak{P}(u)$ in seine Nachbarlage $\mathfrak{P}(u + \mathrm{d}u)$ durch eine infinitesimale elliptische Schraubung mit den absolut polaren Schraubachsen

$$p = [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'], \quad p^* = [\mathfrak{p}, -\mathfrak{p}']$$

übergeführt wird. Diese Achsen erzeugen also die Krümmungsachsenflächen Φ^a, Φ^{a*} der Regelfläche Φ.

2. Ähnlich wie *H. R. Müller* [13] die Böschungslinien des $\mathbf{E}^3$ definiert hat, heiße nun eine Regelfläche $\Phi: g_3(u) = [\mathfrak{x}_3(u), \mathfrak{x}_3'(u)]$ eine *Linksböschungsfläche*, wenn ihr linkes Erzeugendenbild $\mathfrak{x}_3(u)$ mit einer *festen Richtung* $\mathfrak{p}$ einen *konstanten Winkel* θ einschließt. Entsprechend seien *Rechtsböschungsflächen* definiert. Es ist klar, daß bei einer Linksböschungsfläche die feste Richtung $\mathfrak{p}$ mit dem linken Darbouxvektor (1.6) übereinstimmt und daß wegen (1.7) $\omega_3/\omega_1 = \text{const.}$ eine Linksböschungsfläche kennzeichnet. D. h.:

Eine Linksböschungsfläche ist dadurch gekennzeichnet, daß ihre Krümmungsachsenflächen Φ^a, Φ^{a*} Cliffordsche Linkszylinder sind.

Weiter ergibt sich unmittelbar aus den Ableitungsgleichungen (1.1), daß jede im natürlichen Begleittetraeder einer Linksböschungsfläche *befestigte* Gerade ebenfalls eine Linksböschungsfläche erzeugt. Die entsprechenden Formulierungen für Rechtsböschungsflächen erwähnen wir im folgenden nicht besonders.

Als „*allgemeine Schraubregelfläche*" im $\mathbf{E}^3$ wird in [10] eine Regelfläche bezeichnet, deren Erzeugende durch eine (einparametrige) Schar von elliptischen Schraubungen mit *festen* Schraubachsen bewegt wird[6]). Da diese festen Schraubachsen die Krümmungsachsen sein müssen, folgt:

---

[5]) Vgl. *H. R. Müller* [14], S. 85, 100.

[6]) Gestattet die Regelfläche sogar eine 1-parametrige Untergruppe von elliptischen Bewegungen, so heiße sie zur Unterscheidung „*gleichförmige Schraubregelfläche*".

Die Regelflächen, die sowohl Links- als auch Rechtsböschungsflächen sind, sind die allgemeinen Schraubregelflächen.

Um Böschungszylinder analog dem euklidischen Fall zu definieren, betrachten wir die im natürlichen Begleittetraeder $\mathfrak{P}$ einer Linksböschungsfläche Φ $\left(\cot\theta = \frac{\omega_3}{\omega_1} = const.\right)$ befestigten zu einander absolut polaren Geraden

mit
$$h = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'], \quad h^* = [\mathfrak{x}, -\mathfrak{x}']$$
$$\mathfrak{x} = \mathfrak{p} = \mathfrak{r}_1 \sin\theta + \mathfrak{r}_3 \cos\theta, \quad \mathfrak{x}' = \mathfrak{r}_1' \sin\theta + \mathfrak{r}_3' \cos\theta.$$

Da $\mathfrak{p}$ und θ fest sind, beschreiben h und h^* je einen Linkszylinder. Wegen
$$\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{r}_3 \rangle = \langle \mathfrak{x}', \mathfrak{r}_3' \rangle = \cos\theta$$
schneiden h, h^* die Erzeugende $g_3 = [\mathfrak{r}_3, \mathfrak{r}_3']$ unter konstantem Winkel θ in den Striktionspunkten P_0, P_3 von Φ [7]). Da also die Striktionslinien von Φ auf den von h bzw. h^* erzeugten Linkszylindern liegen, kann man diese als die beiden *Böschungszylinder* und den konstanten Winkel θ als den *Böschungswinkel* der Linksböschungsfläche Φ bezeichnen.

Die Striktionslinien von Böschungsflächen sind i. allg. keine Böschungslinien, es gilt aber:

Eine der beiden Striktionslinien einer Linksböschungsfläche ist genau dann Linksböschungslinie, wenn die entsprechende Striktion konstant ist.

Die *Striktion* σ_i $(i = 0, 3)$ von Φ ist, wie im Euklidischen, der Winkel zwischen der Regelerzeugenden g_3 und der Tangente $(P_i, \mathrm{d}P_i)$ an die Striktionslinie $P_i(u)$ $(i = 0, 3)$. Zum Beweis des Satzes: Ist $\sigma_0 = const.$, so schließt die Striktionslinie $P_0(u)$ mit der Erzeugenden h des Böschungszylinders von Φ den konstanten Winkel $\sigma_0 \pm \theta$ ein, ist also selbst eine Linksböschungslinie. Ist umgekehrt $P_0(u)$ eine Linksböschungslinie, so beschreibt das linke sphärische Bild $\mathfrak{x}_1$ der Striktionslinientangente einen Kreisbogen um eine feste Richtung $\mathfrak{q}$. Da nun $\mathfrak{x}_1 = \cos\sigma_0 \mathfrak{r}_3 + \sin\sigma_0\, \mathfrak{r}_1$ und die $\mathfrak{r}_3(u)$, $\mathfrak{r}_1(u)$ selbst sphärische Kreise um die feste Richtung $\mathfrak{p}$ beschreiben, muß $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p}$ zusammenfallen, also fällt der Böschungszylinder von Φ mit demjenigen der Striktionslinie $P_0(u)$ zusammen und σ_0 ist konstant.

In [10] wird ein Satz für die Erzeugung von Regelflächen im $\mathbf{E}^3$ mit einer konstanten Striktion angegeben, wie ihn *Kruppa* [9] im Euklidischen erwähnt hat: Durch eine elliptische Drehung mit konstantem Winkel der Tangente einer regulären Kurve C um die jeweilige Hauptnormale erhält man die Regelfläche Φ mit einer konstanten Striktion bezügl. C als einer der beiden Striktionslinien von Φ. Hieraus, sowie dem letzten Satz ergibt sich eine einheitliche Erzeugungsweise für Böschungsflächen mit einer konstanten Striktion im $\mathbf{E}^3$:

Dreht man die Tangente einer (regulären) Linksböschungslinie C um die jeweilige Hauptnormale mit einem konstanten Winkel, so erhält man die Erzeugende einer Links-

[7]) Zwei Geraden $g = [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}']$, $h = [\mathfrak{x}, \mathfrak{x}']$ schneiden sich genau dann, wenn $\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{r} \rangle = \langle \mathfrak{r}', \mathfrak{x}' \rangle$ gilt. Vgl. etwa *H. R. Müller* [14], S. 69.

böschungsfläche mit konstanter Striktion bezügl. C als einer der beiden Striktionslinien. Auf diese Weise läßt sich jede Böschungsfläche dieses Typs (mit nicht entarteten Striktionslinien) erzeugen.

Ist neben einer Striktion auch noch der *Drall* konstant, so ist auch die zweite Striktion konstant[8]); „links" und „rechts" ist bei Böschungsflächen dieser Art nicht mehr zu unterscheiden, denn es gilt:

Die Böschungsflächen mit konstantem Drall und konstanten Striktionen sind die gleichförmigen[9]) *Schraubregelflächen des* $\mathbf{E}^3$.

Beweis: Die Bedingung für „Linksböschungsfläche" lautet mit (1.5), (1.7):

$$\tau_3 + \varkappa_3 = \cot\theta(\tau_1 + \varkappa_1) \quad (\theta = const.). \tag{2.1}$$

Die Bedingung für die Konstanz beider Striktionen (und damit die Konstanz des Dralls $d_0 = \varkappa_1/\tau_1$) lautet

$$\tan\sigma_0 = \varkappa_1/\varkappa_3 := S_{\mathrm{I}}, \qquad \tan\sigma_3 = \tau_3/\varkappa_3 := S_{\mathrm{II}}; \quad S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}} \text{ konst.} \tag{2.2}$$

Aus (2.1) erhält man für den Drall $d_2^z = \tau_3/\varkappa_3$ der Zentraltangentenflächen Φ^z, Φ^{z*} bzgl. P_2 nach Division durch $\varkappa_3$:

$$d_2^z = \cot\theta\,(S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}}) - 1 = const. \tag{2.3}$$

Die Regelfläche Φ ist durch die 3 Invarianten $\sigma_0, \sigma_3, d_2^z$ (bis auf Bewegungen im $\mathbf{E}^3$) bestimmt. Sind diese konstant, so gestattet Φ eine 1-parametrige elliptische Bewegungsuntergruppe, d. h. Φ ist eine gleichförmige Schraubregelfläche (vgl. auch [10]).

Wir fragen nun noch, welche Böschungsflächen zugleich *Edlingerflächen* sind. Edlingerflächen sind bekanntlich[10]) diejenigen Regelflächen, deren geradlinige *Schmiegquadriken* sämtlich *Drehhyperboloide* sind. Überträgt man diese Definition in den elliptischen Raum, so zeigt sich[11]), daß, wie im Euklidischen, eine Edlingerfläche dadurch gekennzeichnet ist, daß der Drall

$$d_0 = \frac{\varkappa_1}{\tau_1} \quad konstant \tag{2.4}$$

ist, und die beiden Striktionslinien *Krümmungslinien* sind,

$$\varkappa_1\tau_1 + \varkappa_3\tau_3 = 0 \tag{2.5}$$

Hat eine Linksböschungsfläche Φ zusätzlich die Eigenschaften (2.4) und (2.5), so ergibt sich aus (1.7), daß alle drei Invarianten $\sigma_0, \sigma_3, d_2^z$, welche Φ bestimmen, konstant sind, Φ also eine gleichförmige Schraubregelfläche ist. Gleiches gilt auch für Rechtsböschungsflächen.

Die einzigen (nicht entarteten) Böschungsflächen des elliptischen Raumes, die zugleich Edlingerflächen sind, sind die gleichförmigen Schraubregelflächen.

---

[8]) Für die Striktionen σ_i bzw. die Dralle d_i bzgl. P_i ($i = 0, 3$) gilt mit den Invarianten aus (1.1) $\tan\sigma_0 = \dfrac{\varkappa_1}{\varkappa_3}$, $\tan\sigma_3 = \dfrac{\tau_1}{\varkappa_3}$, $d_0 = \dfrac{\varkappa_1}{\tau_1}$, $d_3 = \dfrac{1}{d_0}$ (vgl. auch die Tabelle in [10]).

[9]) Vgl. Fußnote 6.

[10]) *Edlinger* [7], *Sachs* [15].

[11]) *Lübbert* [11].

Bei *Mindingbiegung*[12]) geht die Eigenschaft, Böschungsfläche zu sein, i. allg. verloren. Sie ist aber z.B. Mindingbiegungsinvariant für Böschungsflächen mit konstant gedrallten Zentraltangentenflächen. Hierdurch ergibt sich die Möglichkeit, alle Böschungsflächen dieses Typs bis auf Mindingbiegung mit Hilfe von Böschungslinien zu charakterisieren. Es gilt:

Jede nicht zu einem Cliffordzylinder entartete Linksböschungsfläche des $\mathbf{E}^3$ *mit konstant gedrallten Zentraltangentenflächen kann verbogen werden in eine Linksböschungsfläche, welche die Polarfläche zur Binormalenfläche einer Linksböschungslinie ist.*

Beweis: Φ sei Linksböschungsfläche mit $d_2^{\mathfrak{z}} = const.$ Φ sei nicht zu einem Cliffordzylinder entartet, d. h. $\omega_1 = \tau_1 + \varkappa_1 \neq 0$, also θ konstant, $\neq 0$, und daher $\tan\sigma_0 + \tan\sigma_3 := S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}} \neq 0$. Aus (2.3) folgt

$$S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}} := c, \ \textit{konstant}, \neq 0 \tag{2.6}$$

Bei gleichsinniger Mindingbiegung $\Phi \to \tilde{\Phi}$ (Φ, $\tilde{\Phi}$ auf gleiche Parameter bezogen) gilt für die Differentialinvarianten der Regelfläche: $\varkappa_1 = \tilde{\varkappa}_1$, $\varkappa_3 = \tilde{\varkappa}_3$, $\tau_1 = \tilde{\tau}_1$, während die neue Invariante $\tilde{\tau}_3$ von der Art der Mindingbiegung abhängt (vgl. [10]). Man kann die Mindingbiegung so wählen, daß $\tilde{\tau}_3 = 0$ wird (für alle $u \in I$): Die Zentraltangentenflächen gehen dann in *Torsen* über, $\tilde{d}_2^{\mathfrak{z}} = 0$. Für die Bildregelfläche $\tilde{\Phi}$ ergibt sich analog (2.3) die Beziehung

$$0 = \cot\tilde{\theta}\,(S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}}) - 1. \tag{2.7}$$

Wegen (2.6) und der Biegungsinvarianz von $S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ folgt aus (2.7), daß $\cot\tilde{\theta}$ wieder konstant ist. Also ist $\tilde{\Phi}$ ebenfalls eine Böschungsfläche. Die Polarfläche $\tilde{\Phi}^*$ zu $\tilde{\Phi}$ hat das natürliche Begleittetraeder $\tilde{\mathfrak{P}}^{*T} = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_0, \tilde{P}_3, \tilde{P}_2)$, wobei die Punkte $\tilde{P}_\alpha$ die Bildpunkte der Ecken P_α des natürlichen Begleittetraeders $\mathfrak{P}$ von Φ sind. Wegen $\tilde{\tau}_3 = 0$ hat Φ^* das Ableitungssystem

$$d\tilde{\mathfrak{P}}^* = \tilde{\mathfrak{S}}^*, \quad \tilde{\mathfrak{S}}^* = \begin{pmatrix} 0 & -\varkappa_1 & 0 & 0 \\ \varkappa_1 & 0 & \varkappa_3 & 0 \\ 0 & -\varkappa_3 & 0 & -\tau_1 \\ 0 & 0 & \tau_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist das Ableitungssystem einer Raumkurve $C: P = \tilde{P}_1(u)$ mit der Binormalen $(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$. Deren absolute Polare, $(\tilde{P}_0, \tilde{P}_3)$, ist die Bildgerade der Erzeugenden g_3 von Φ. Die Invarianten, Krümmung und Torsion, der Raumkurve C berechnen sich zu

$$k_C = -\frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}, \qquad t_C = \frac{\tau_1}{\varkappa_1}.$$

[12]) Eine isometrische Abbildung $\Phi \to \tilde{\Phi}$ einer Regelfläche Φ auf eine Regelfläche $\tilde{\Phi}$ heißt wie im Euklidischen *Mindingbiegung*, wenn dabei die erzeugenden Geraden von Φ in diejenigen von $\tilde{\Phi}$ übergehen. Mindingbiegung läßt ebenfalls die Striktionslinien invariant.

Wegen (2.6) stehen sie in der Beziehung

$$t_C + 1 = -c k_C \quad (c \neq 0).$$

Nach *H. R. Müller* [13], S. 155, ist C daher eine Linksböschungslinie.

Anmerkung: Die Böschungsflächen mit konstant gedrallten Zentraltangentenflächen sind i. allg. keine Schraubregelflächen. Die Mindingdbiegung im vorangegangenen Satz ist daher i. allg. nicht trivial. Übrigens kann jede (nicht entartete) Regelfläche Φ des $\mathbf{E}^3$ in eine Links- oder Rechtsböschungsfläche Φ mindingverbogen werden. Man braucht hierzu nur $\tilde{\tau}_3 := c(\tau_1 + \varkappa_1) - \varkappa_3$ bzw. $\tilde{\tau}_3 := c'(\tau_1 - \varkappa_1) + \varkappa_3$ (c, c' konstant) zu wählen[13]. Ist Φ kein Cliffordzylinder ($\varkappa_1 \neq \pm \tau_1$), so gibt es sogar je eine 1-parametrige Schar von Mindingbiegungen, die dies bewerkstelligen.

3. Ähnlich wie im elliptischen Raum kann man Böschungsflächen auch im 3-dimensionalen *quasielliptischen Raum* $\mathbf{E}_1^3$ betrachten. Bildet man nach *Blaschke/Grünwald*[14] die Menge der zulässigen Geraden des $\mathbf{E}_1^3$ auf ein Paar $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ von euklidischen Ebenen ab, so kann man eine Regelfläche $\Phi: g(u) = [x(u), x'(u)]$ ($x, x' \in \mathbf{R}^2$) des $\mathbf{E}_1^3$ als Linksböschungsfläche bezeichnen, wenn der linke Bildpunkt $x(u)$ einen *Kreis(bogen)* durchläuft. Die Böschungsflächen des $\mathbf{E}_1^3$ werden dann ähnliche Eigenschaften wie die des $\mathbf{E}^3$ haben.

---

[13]) Im Euklidischen vgl. *Brauner* [4], S. 103.

[14]) Vgl. *Blaschke/Müller* [3].

Literatur

[1] *Blaschke, W.:* Nichteuklidische Geometrie und Mechanik I, II, III. Leipzig und Berlin, Teubner 1942.

[2] *Blaschke, W.:* Kinematik und Quaternionen. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1960.

[3] *Blaschke, W./ Müller, H. R.:* Ebene Kinematik. München, Oldenbourg 1956.

[4] *Brauner, H.:* Über Strahlflächen von konstantem Drall. Monatsh. Math. *63* (1959) 101—111.

[5] *H. Brauner:* Die verallgemeinerten Böschungsflächen. Math. Annalen *143* (1961) 431—439.

[6] *Brauner, H.:* Die windschiefen Flächen konstanter konischer Krümmung. Math. Annalen *152* (1963) 257—270.

[7] *Edlinger, W.:* Über Regelflächen, deren sämtliche oskulierenden Hyperboloide Drehhyperboloide sind. Sb. Akad. Wiss. Wien IIa, *132* (1923) 343—351.

[8] *Hoschek, J.:* Eine Verallgemeinerung der Böschungsflächen. Math. Annalen *179*, (1969) 275—284.

[9] *Kruppa, E.:* Zur Differentialgeometrie der Strahlflächen und Raumkurven. Sb. Akad. Wiss. Wien IIa, *157* (1949) 143—176.

[10] *Lübbert, C.:* Über Regelflächen konstanter Striktion oder konstanten Dralls im elliptischen Raum. Sb. Akad. Wiss. Wien IIa, *184* (1975) 11—28.

[11] *Lübbert, C.:* Über Regelflächen mit speziellen Schmiegquadriken im elliptischen Raum. Sb. Akad. Wiss. Wien IIa, (erscheint demnächst).

[12] *Lübbert, C.:* Verallgemeinerte Begleittetraeder von Regelflächen und Kurven im elliptischen Raum. Sb. Akad. Wiss. Wien IIa, (erscheint demnächst).

[13] *Müller, H. R.:* Die Böschungslinien des elliptischen Raumes. Monatsh. Math. *53* (1949) 152—164.

[14] *Müller, H. R.:* Sphärische Kinematik. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1962.

[15] *Sachs, H.:* Einige Kennzeichnungen der Edlinger-Flächen. Monatsh. Math. *77* (1973) 241—250.